ESPACES VECTORIELS

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\right\}$
2) $E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}$
3) $E_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\right\}$
4) $E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\right\}$
5) $E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$
6) $E_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$
7) $E_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 6y + 3z = 0\right\}$
8) $E_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \in \mathbb{Q}\right\}$
9) $E_9 = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est convergente}\right\}$
10) $E_{10} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\right\}$
11) $E_{11} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\right\}$
12) $E_{12} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_{11} = 0\}$
13) $E_{13} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \prod\limits_{i=1}^{n} A_{ii} = 0\right\}$
14) $E_{14} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(2) = 0\right\}$
15) $E_{15} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 2\right\}$
16) $E_{16} = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0)\}$
17) $E_{17} = \left\{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$
18) $E_{18} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est monotone}\right\}$

Exercice 2. Soit A l'ensemble des suites réelles arithmétiques. Est-ce que A est un e.v. ?
Soit G l'ensemble des suites réelles géométriques. Est-ce que G est un e.v. ?

Exercice 3. L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ est-il un $\mathbb{K}$-e.v. ?

Exercice 4. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\}$ est-il un $\mathbb{C}$-e.v. ?

Exercice 5 ($\star$)**.** Soit F, G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v. si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 6. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1) $\mathcal{F}_1 = \big((1,1,0), (0,1,1)\big)$
2) $\mathcal{F}_2 = \big((1,-1,0), (0,1,-1), (1,0,-1)\big)$
3) $\mathcal{F}_3 = \big((1,1,0), (1,0,1), (2,1,2)\big)$
4) $\mathcal{F}_4 = \big((1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (1,1,1)\big)$
5) $\mathcal{F}_a = \big((1,1,a), (1,a,1), (a,1,1)\big)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Parmi les familles de l'exercice précédent, lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ou liées ?

$$\mathcal{F}_1 = (\cos, \sin, \mathrm{id}) \qquad \mathcal{F}_3 = (x \mapsto x + 2, \quad x \mapsto 3x + 4, \quad x \mapsto 5x + 6)$$
$$\mathcal{F}_2 = \left(x \mapsto e^x, \quad x \mapsto e^{2x}\right) \qquad \mathcal{F}_4 = \left(1_{[a,+\infty[}\right)_{a \in \mathbb{R}}$$

Exercice 9. Trouver une famille génératrice des s.e.v. suivants :

1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
2) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
3) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y - z = 0\}$
4) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z = 4t\}$

Exercice 10. Soit $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes tels que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 11. On se place sur l'e.v. $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $C : x \mapsto \cos^2 x$ et $S : x \mapsto \sin^2$.

1) On considère le s.e.v. $F = \mathrm{Vect}(C,S)$. Montrer que (C,S) est une base de F.
2) Montrer que les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$ appartiennent à F et déterminer leurs coordonées selon la base (C,S).

Exercice 12 ($\star$)**.** La famille de fonctions $(x \mapsto e^{kx})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle libre ou liée ?

Somme de s.e.v.

Exercice 13. On considère les ensembles $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que A et B sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2) Écrire les vecteurs $u = (1,2,1)$ et $v = (2,3,-1)$ sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(X^2+1, X^4-1\right) \qquad E_2 = \mathrm{Vect}\left(X^2, X^4+X\right)$$

La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe ?

Exercice 15. Montrer que $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$, avec

$$F := \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G := \{x \mapsto ax+b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires.

   Indication : pour une matrice M donnée, on pourra considérer la matrice $\dfrac{M+M^\top}{2}$.

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et

$$F = \mathbb{R}_1[X] \qquad G = \left\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\right\}$$

1) Montrer que F et G sont des s.e.v. supplémentaires dans E. *Indication : on pourra considérer une division euclidienne judicieuse.*
2) Déterminer la décomposition des polynômes $1, X, X^2$ et X^3 selon F et G.

Dimension et compléments

Exercice 18. On définit le s.e.v. suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\right\}$$

1) Déterminer la dimension de F.
2) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19. On considère les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + z = 0\right\} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((0,1,-1)\right)$$

1) Déterminer une base de F et une base de G.
2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. On considère la famille de 3 vecteurs

$$u = (1,1,-1) \qquad v = (1,-1,1) \qquad w = (-1,1,1)$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Exprimer le vecteur $(2,1,3)$ selon la base $\mathcal{B}$.

Exercice 21. On définit les s.e.v. suivants

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\} \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\right\}$$

1) Déterminer la dimension de F ainsi qu'une base de F.
2) Même question pour G.
3) Même question pour $F \cap G$.
4) Même question pour $F + G$.

Exercice 22. On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & 2y \end{pmatrix} \middle| \, x,y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que E est un e.v.
2) Déterminer la dimension de E.

Exercice 23. Déterminer les dimensions de $D_n(\mathbb{K})$ et de $T_n(\mathbb{K})$.

Exercice 24 ($\star$)**.** Déterminer la dimension de $A_n(\mathbb{K})$. En déduire celle de $S_n(\mathbb{K})$.